

# Optimización del diseño de hélices marinas mediante el método de Lagrange.

## *Optimization of the design of marine propellers using the Lagrange method.*

Ariel Humberto Chafuelán Vera <sup>1</sup>

De la Rosa Rosales Yusnier Enrique <sup>2</sup>

Aceptado: 05 de abril de 2023

DOI: <https://doi.org/10.26495/icti.v10i1.2414>



### Resumen

En este artículo, se analiza la aplicación del método del multiplicador Lagrange en función del método de Newton y el método de gradiente de primer orden para un diseño óptimo de hélices marinas. El método del multiplicador de Lagrange puede transformar el problema de optimización con restricciones en un problema de optimización sin restricciones; el método de Newton y el método del gradiente de primer orden pueden resolver problemas de optimización sin estas. Para ello, se explora la teoría básica del método del multiplicador de Lagrange y se analizan sus métodos relacionados. En la selección del método de diseño, este documento utiliza un ejemplo simple para probar los resultados y elige el método de Lagrange-Newton. Para lograr verificar los resultados se aplica un ejemplo de diseño, el método propuesto al diseño del paso de la hélice y la curvatura se compara con los resultados del diseño con el método tradicional de diseño teórico de la hélice. El método de Lagrange-Newton puede diseñar de manera estable una geometría que satisfaga las condiciones de restricción, siempre y cuando debido a la distribución de presión resultante el paso o la curvatura se diseñe por separado.

**Palabras clave:** Diseño de hélices, optimización., método Lagrange-Newton, multiplicador de Lagrange

### Abstract

In this article, the application of the Lagrange multiplier method based on the Newton method and the first order gradient method for an optimal design of marine propellers is discussed. The Lagrange multiplier method can transform the constrained optimization problem into an unconstrained optimization problem; Newton's method and the first-order gradient method can solve optimization problems without them. To do this, the basic theory of the Lagrange multiplier method is explored and its related methods are discussed. In the selection of the design method, this document uses a simple example to test the results and chooses the Lagrange-Newton method. In order to verify the results, a design example is applied, the proposed method to the design of the propeller pitch and curvature is compared with the design results with the traditional method of theoretical design of the propeller. The

<sup>1</sup> Universidad Laica Eloy Alfaro de Manabí, Manta-Manabí, Ecuador, [arielchafuelan1999@gmail.com](mailto:arielchafuelan1999@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0002-9526-5268>

<sup>2</sup> Universidad Laica Eloy Alfaro de Manabí, Manta - Manabí, Ecuador, [yusnier.delarosa@uleam.edu.ec](mailto:yusnier.delarosa@uleam.edu.ec), <https://orcid.org/0000-0002-1478-2029>

Lagrange-Newton method can stably design a geometry that satisfies the constraint conditions, as long as due to the resulting pressure distribution the pitch or curvature is designed separately.

**Keywords:** Propeller design, optimization, Lagrange-Newton method, Lagrange multiplier

## 1. INTRODUCCIÓN

La esencia del problema de optimización de hélices suele ser encontrar una hélice con un mejor rendimiento hidrodinámico para una condición de funcionamiento definida, utilizando una determinada hélice como referencia (Wang et al., 2022). Para determinar la geometría de la nueva hélice, es necesario especificar los parámetros utilizados para describir la hélice.

El propósito del problema de optimización de la hélice es mejorar el rendimiento hidrodinámico de la hélice modificando la geometría de la hélice, que incluye la eficiencia en aguas abiertas de la hélice, el rendimiento de cavitación de la hélice y el ruido de vibración de la hélice (Sumanth et al., 2022). Además, una serie de restricciones, como las restricciones de fuerza, generalmente se especifican cuando se implementa la optimización de la hélice (Ariana et al., 2020).

En cuanto a las necesidades de diseño, la investigación sobre métodos de optimización es muy importante. Se han desarrollado y madurado algunas teorías de optimización vigorosas y tradicionales, y se pueden aplicar prácticamente a problemas de diseño de ingeniería. Por lo tanto, el principal objetivo de investigación de este artículo es desarrollar un método de optimización que se pueda utilizar para el diseño de hélices marinas.

Esta investigación elige el método del multiplicador Lagrangiana porque puede transformar el problema de optimización con restricciones en un problema de optimización sin restricciones. Al mismo tiempo, debido al método de Lagrange, existen muchos métodos evolutivos del método del multiplicador, que hace que la aplicación sea tanto flexible como profunda. Se espera que este enfoque resulte en una geometría de hélice más eficiente que los métodos de diseño de hélices convencionales.

### Multiplicador de Lagrange

Los métodos de programación matemática a menudo se utilizan ampliamente en el diseño de ingeniería (Bergamaschi et al., 2021). Entre los métodos de programación matemática, el método del multiplicador de Lagrange es un método de programación matemática de uso frecuente (Ruis et al., 2018). Lagrange (Lagrange, 1736-1813) fue el segundo gran matemático del siglo XVIII, y el otro fue Euler (Euler, 1707-1783), que era 29 años mayor que él. Euler apreciaba a Lagrange y, junto con d'Alembert, recomendó a Lagrange como sucesor de Euler (Academia de Berlín) en 1766 (Bussotti, 2003). El método del multiplicador de Lagrange es un método para transformar el problema de optimización restringida en un problema de optimización no restringida.

Como se introduce un coeficiente indeterminado  $-\lambda$ , se forma una nueva función objetivo no restringida, por lo que la conversión matemática se simplifica. La solución óptima no restringida de la nueva función objetivo es la solución óptima restringida de la función objetivo original (Vadlamani et al., 2020; Bertsekas, 1982).

Existe bastante literatura sobre el diseño de ingeniería utilizando el método del multiplicador de Lagrange. En 2020, Cheng y Liu, utilizaron un nuevo enfoque del multiplicador de Lagrange para los flujos de gradiente y se propuso para diseñar esquemas estables de energía incondicional para flujos de gradiente conduciéndose a esquemas energéticamente estables. De igual forma Sun y Huang, (2020)

diseñaron un método integrado de línea de elevación/panel de superficie para un diseño óptimo de la hélice teniendo en cuenta el efecto del cubo.

En el 2021, Bayram y Korobenko diseñaron una formulación numérica para flujos de cavitación alrededor de hélices marinas basada en el método multiescala variacional, el enfoque numérico se usó para modelar flujos de cavitación sobre superficies hidrodinámicas en movimiento, utilizando también el método del multiplicador de Lagrange bajo un paradigma de descripción Lagrangiana-Euleriana.

## 2. MATERIALES Y MÉTODOS

### Método de Lagrange-Newton

Se va a diseñar un paso de hélice y su distribución curvatura<sup>3</sup> para hacer que tenga la mejor eficiencia ( $K_Q$  mínimo) por debajo del  $K_T$  requerido, que cumpla con los requisitos de diseño usando la curva cúbica  $a \frac{r^3}{R} + b \frac{r^2}{R} + c \frac{r}{R} + d = 0$  para representar su geometría. Las incógnitas que se pretenden resolver son ocho variables tales como el paso de hélice y los coeficientes  $a, b, c, a', b', c', d'$  de la curva de distribución de hélice. Después de la distribución geométrica, usamos el método de elementos de contorno NTOU-PATPANS desarrollado por Hsin para calcular los valores correspondientes de  $K_Q$  y  $K_T$ .

Entonces:

$$\{ \min K_Q \text{ sujeto a } K_T - K_T^* = 0$$

Dónde  $K_T^*$  es el coeficiente de empuje límite.

$$\begin{aligned} K_Q &= K_Q(\gamma_i) \\ i &= 1, 2, 3, \dots, 8 \\ K_T &= K_T(\gamma_i) \end{aligned} \tag{1}$$

Dónde  $\gamma_i$  son los 8 parámetros geométricos  $a, b, c, a', b', c', d'$ .

De acuerdo con la teoría de la sección, se puede establecer que la función de Lagrange es (2):

$$L = K_Q + \lambda(K_T - K_T^*) \tag{2}$$

Después de la diferenciación parcial, obtenemos:

$$\{\nabla L = \nabla K_Q + \lambda \nabla K_T = 0 \text{ } K_T - K_T^* = 0 \tag{3}$$

Donde  $\nabla L$  contiene elementos que son

$$\frac{\partial K_Q}{\partial \gamma_i} + \lambda \frac{\partial K_T}{\partial \gamma_i} \quad i = 1, 2, \dots, 8 \tag{4}$$

Entonces:

$$G = [\nabla L \text{ } K_T - K_T^*], \vec{Z} = [\gamma_1 \ \gamma_2 \ \dots \ \gamma_8 \ \lambda] \tag{5}$$

<sup>3</sup> También se conoce como *camber* en la literatura ampliada.

Para ello se tiene que resolver  $G(\vec{Z}) = 0$  por el método de Newton:

$$\Delta\vec{Z}^j = -\frac{\Delta(\vec{Z}^j)}{\nabla G_j} \quad (6)$$

$$= -\frac{[\gamma_1^{(k+1)} \gamma_2^{(k+1)} \dots \lambda^{(k+1)}] - [\gamma_1^k \gamma_2^k \dots \lambda^k]}{\begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial G_1}{\partial \gamma_2} & \frac{\partial G_1}{\partial \gamma_3} & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial \gamma} & \frac{\partial G_2}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial G_2}{\partial \gamma_2} & \frac{\partial G_2}{\partial \gamma_3} & \dots & \frac{\partial G_2}{\partial \gamma} & \dots & \frac{\partial K_T}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial K_T}{\partial \gamma_2} & \frac{\partial K_T}{\partial \gamma_3} & \dots & \frac{\partial K_T}{\partial \gamma} \\ -K_T^* \end{bmatrix}^{-1}} [G_1 \ G \quad (7)$$

Entre ellos, G es el elemento diferencial de primer orden y  $\nabla G_j$  es el elemento diferencial de segundo orden. Para el cálculo del elemento diferencial, este artículo utiliza el método de la diferencia central para aproximar su valor.

Proceso iterativo:

- 1) Dado el paso inicial y la distribución de curva de hélice, es decir, el valor de  $\gamma_i$  y cualquier valor inicial de  $\lambda$ .
- 2) Usar PATPANS para calcular su valor  $K_T$  correspondiente, dado un error permisible, si la diferencia entre este y el objetivo  $K_T^*$  está dentro del error permisible, convergerá.
- 3) Se usará PATPANS con diferencias finitas para calcular el valor de cada término diferencial.
- 4) Después del método de transposición de Newton, la ecuación (6) se transforma en  $\nabla G_j \cdot \Delta\vec{Z}^j = -G(\vec{Z}^j)$  y se convierte en un problema de matriz de solución. Este documento utiliza descomposición LU para resolver esta matriz, y se pueden obtener los nuevos parámetros de distribución de paso de hélice y curva.
- 5) Se continúa con el paso 2 hasta la convergencia.

### Método del gradiente lagrangiana

Como se definió en la sección anterior, el enunciado del problema de diseño es:

$$\{ \min K_Q \text{ sujeto a } K_T - K_T^* = 0$$

Dónde  $K_T^*$  es el coeficiente de empuje límite.

$$\begin{aligned} K_Q &= K_Q(\gamma_i) \\ i &= 1,2,3,\dots,8 \\ K_T &= K_T(\gamma_i) \end{aligned} \quad (8)$$

Dónde  $\gamma_i$  son los 8 parámetros geométricos  $a, b, c, a', b', c', d'$ .

De acuerdo con la teoría de la sección, se puede establecer que la función de Lagrange es:

$$L = K_Q + \lambda(K_T - K_T^*) \quad (9)$$

Este problema se analiza como encontrar el mínimo de  $L(\lambda, \gamma_i)$ :

De acuerdo con la teoría de la sección, su dirección de búsqueda unidimensional es:

$$S^{(k)} = -\nabla L(\gamma_i, \lambda) \quad i = 1,2,3,\dots,8 \quad (10)$$

Dónde las derivadas parciales unidimensionales son:

$$\{\nabla L = \nabla K_Q + \lambda \nabla K_T = 0 \quad K_T - K_T^* = 0 \quad (11)$$

Dónde  $\nabla L$  contiene elementos que son:

$$\frac{\partial K_q}{\partial \gamma_i} + \lambda \frac{\partial K_t}{\partial \gamma_i} \quad i = 1, 2, \dots, 8 \quad (12)$$

Estableciendo un tamaño de paso arbitrario  $\alpha$ , usando la ecuación iterativa descrita:

$$X^{(k+a)} = X^k - \alpha \nabla f(X^{(k)}) \quad (13)$$

Sustituyendo:

$$[\gamma_i^{(k+1)} \quad \lambda^{(k+1)}]^T = [\gamma_i^{(k)} \quad \lambda^{(k)}]^T - \alpha \nabla f(\gamma_i, \lambda) \quad i = 1, 2, \dots, 8 \quad (14)$$

Se puede usar el método de diferencia central para calcular las derivadas parciales de primer orden, con ellos se puede resolver un nuevo conjunto de distribución de paso y curvatura, luego los pasos se repiten hasta la convergencia.

Proceso iterativo:

- 1) Dado el paso inicial y la distribución de curvatura de hélice, es decir, el valor de  $\gamma_i$  y cualquier valor inicial de  $\lambda$ .
- 2) Usar PATPANS para calcular su valor  $K_T$  correspondiente, dado un error permisible, si la diferencia entre este y el objetivo  $K_T^*$  está dentro del error permisible, convergerá.
- 3) Se usará PATPANS con diferencias finitas para calcular el valor de cada término diferencial.
- 4) A partir de (14) se pueden obtener los nuevos parámetros de la distribución de paso y curvatura de hélice.
- 5) Se continúa con el paso 2 hasta la convergencia.

### Proceso tradicional de diseño de hélices

Esta sección presentará el proceso tradicional de diseño de hélices utilizado el siguiente modelo.

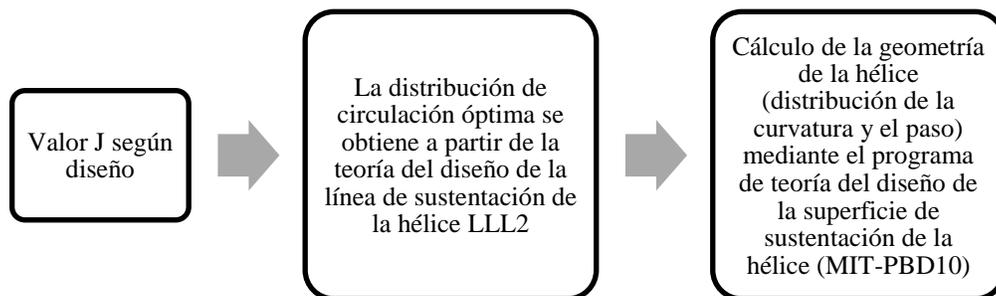


Figura 1. Diagrama de diseño teórico de hélice tradicional

Fuente: Elaboración propia

El diseño general de la hélice pasará por la teoría de la línea de sustentación, ingresará los parámetros requeridos para obtener la mejor distribución de circulación y luego diseñará su geometría a través del programa de diseño de la superficie de sustentación de la hélice. Luego se verificará si el resultado del diseño puede alcanzar el empuje requerido o la velocidad del barco, de lo contrario, se ajustarán los parámetros de la fórmula de la rosca de elevación hasta que se satisfaga el resultado final.

En este artículo, debido a que los resultados del método de diseño óptimo deben compararse entre sí, la geometría diseñada por PBD10 se importará al programa del método de elementos de contorno NTOU-PATPANS, y los resultados de PATPANS se utilizarán como punto de referencia. El proceso de diseño utilizado el siguiente orden:

- 1) Dar el valor J de diseño de la hélice y el coeficiente de empuje de diseño.
- 2) Al movilizar el empuje, se utilizará la fórmula de la rosca de elevación de la hélice para diseñar la mejor distribución de circulación que satisfaga el coeficiente de empuje.
- 3) Se introducirá la distribución de circulación óptima en el programa de superficie de sustentación de la hélice MIT-PBD10 para diseñar la geometría de la hélice (cuerda y paso).
- 4) Sustituyendo la geometría diseñada en el método del elemento límite de flujo potencial NTOU-PATPANS, se pretende obtener el coeficiente de empuje de la hélice, el coeficiente de par y la eficiencia de la hélice; si el coeficiente de empuje satisface el coeficiente de empuje diseñado, se finalizará y completará el diseño; de lo contrario, continuará con el siguiente paso.
- 5) Volviendo al paso dos, se ajusta el empuje para hacer  $T^{nuevo} = T^{calculado} \frac{K_T^{OBJETIVO}}{K_T^{PATPANS}}$  y luego se vuelven a seguir los mismos pasos.

### 3. RESULTADOS

Para lograr resultados satisfactorios, se revisará el método propuesto en este documento basado en cálculos de diseño reales y realizaremos mejoras, el valor J de diseño de la hélice que se diseñará en este documento es 0,75 y el coeficiente de empuje de diseño = 0,22.

#### Resultados diseño tradicional

Para comparar la calidad del método propuesto, primero se usó el método tradicional de diseño teórico de la hélice para diseñar el objetivo del diseño, y se usa el diseño final del proceso tradicional mencionado en la Figura 1. El resultado de diseño obtenido del método de diseño tradicional es  $K_Q=0.0336$ , y la eficiencia 0.7808.

El diagrama de distribución de curvatura de donde se obtuvieron estos resultados se puede apreciar en el  $K_Q$  de la Figura 2, el diagrama de distribución de paso de la Figura 3, el diagrama de distribución de coeficiente de presión Figura 4 y el diagrama de distribución de circulación radial de la Figura 5 para referenciar y comparar con el método propuesto en esta investigación.

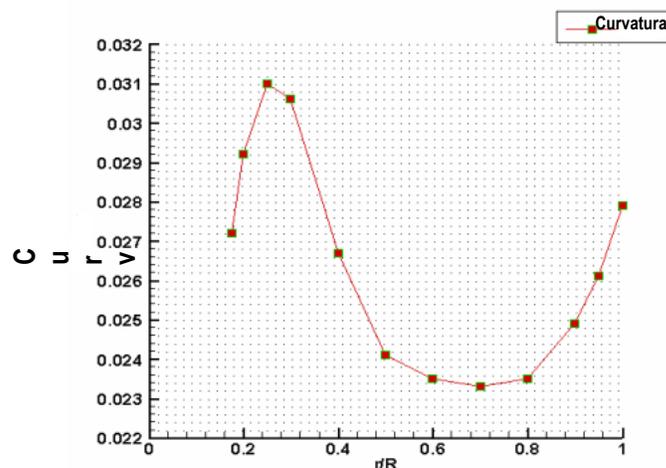
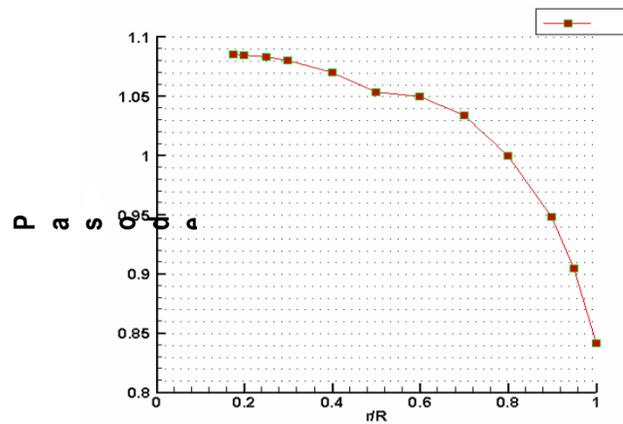


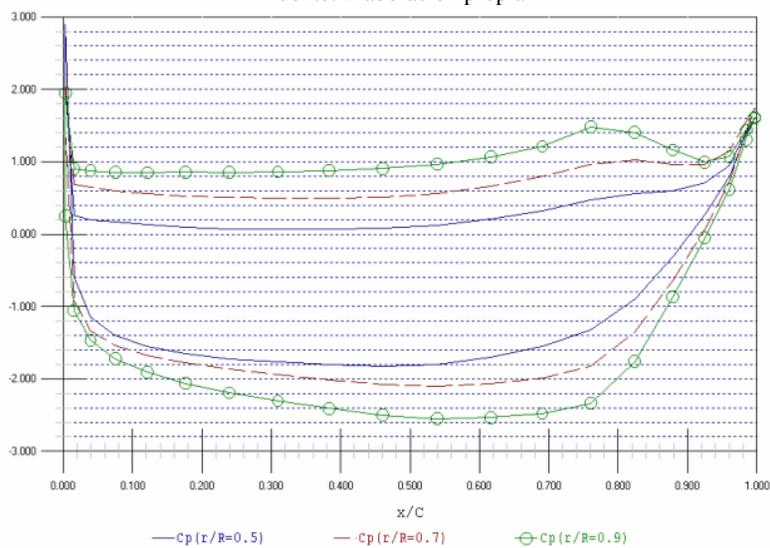
Figura 2. Distribución de la curvatura de una hélice tradicional

Fuente: Elaboración propia

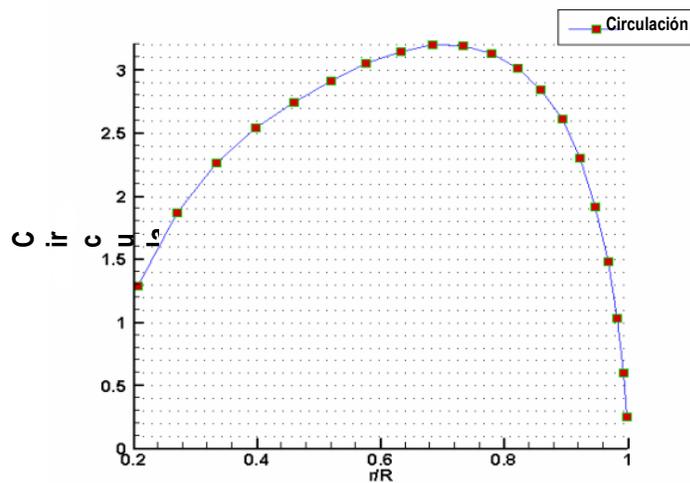
Paso



**Figura 3. Distribución de paso del diseño de hélice tradicional**  
Fuente: Elaboración propia



**Figura 4. Coeficiente de presión del diseño de hélice tradicional**  
Fuente: Elaboración propia



**Figura 5. Distribución de la circulación del diseño de hélice tradicional**  
Fuente: Elaboración propia

### Resultados método Lagrange –Newton

A partir del procedimiento de diseño presentado en el apartado de materiales y métodos, aplicando el método de Lagrange, primero se da un paso inicial y una curvatura al proceso de diseño de la hélice, para ello se propone un conjunto de la distribución de curvatura y paso de hélice constante, como se muestra en la Figura 6.

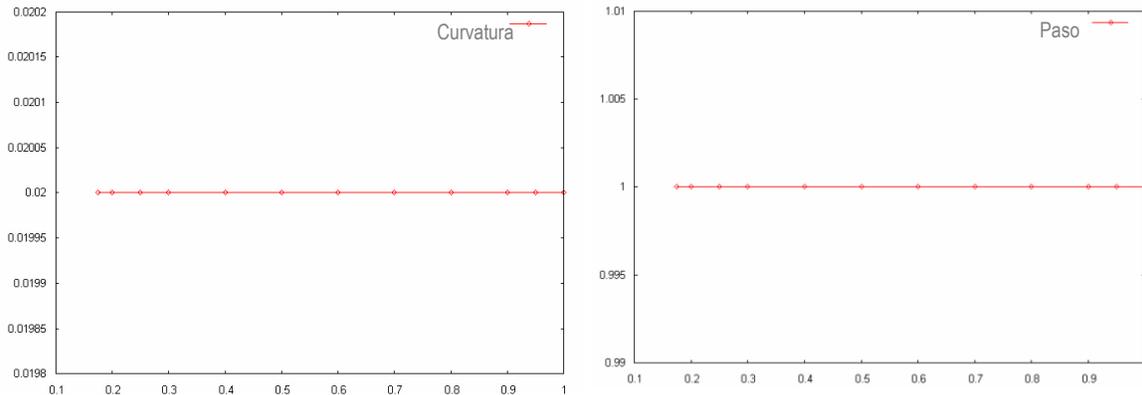


Figura 6. Distribución inicial de curvatura y paso por el método de Lagrangiano

Fuente: Elaboración propia

Luego al usar el método de optimización del método de Lagrange-Newton junto con el programa del método de elementos de frontera de flujo potencial para diseñar la distribución óptima de la curvatura y el paso, y el diseño obtenido se detallan resultados de  $K_Q = 0.034$ , eficiencia = 0.7656. La Figura 7 muestra su distribución de paso, la Figura 8 muestra su distribución de curvatura, Figura 9 muestra su distribución de coeficiente de presión, y la Figura 10) muestra su mapa de distribución de circulación radial.

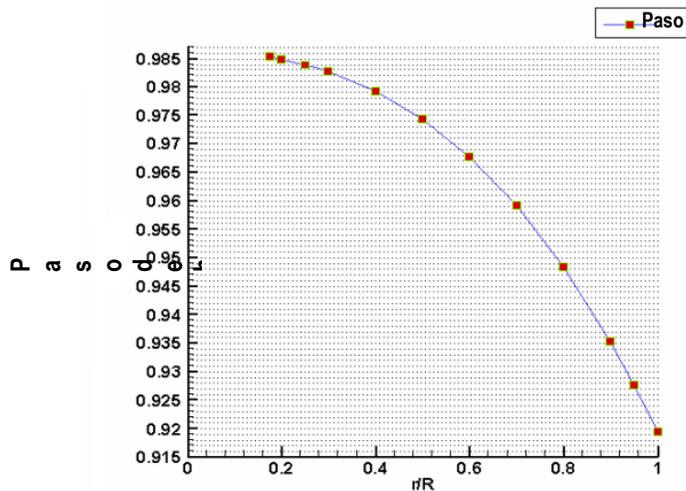


Figura 7. Paso de diseño del método Lagrange-Newton

Fuente: Elaboración propia

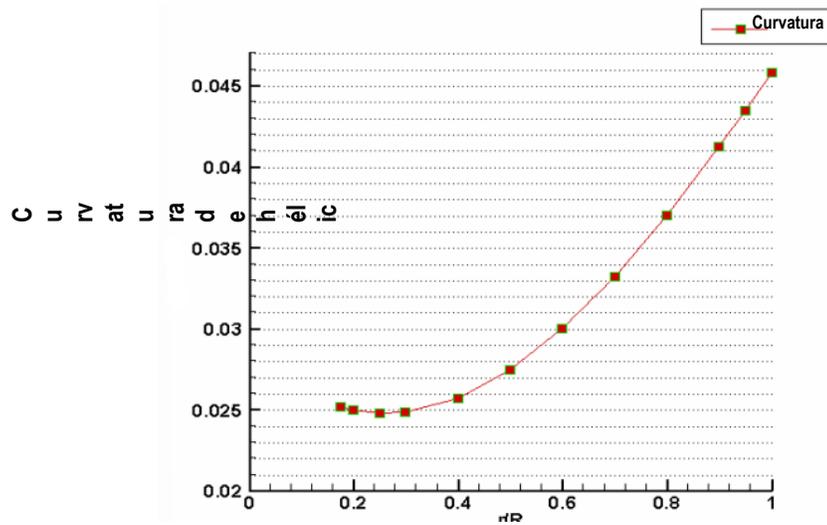


Figura 8. Distribución de curvas de hélice del método Lagrange-Newton  
Fuente: Elaboración propia

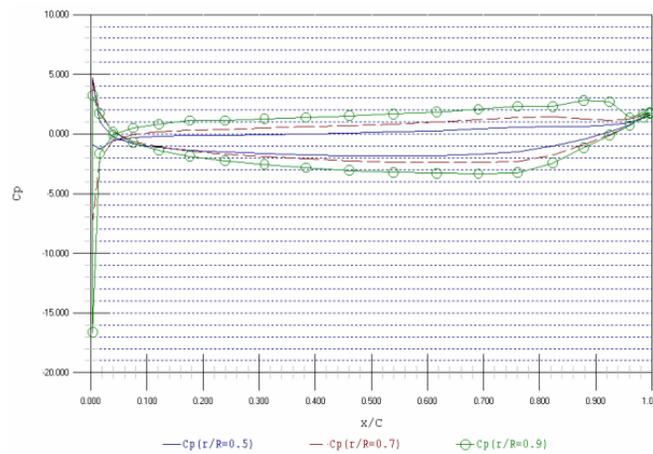


Figura 9. Coeficiente de presión del método Lagrange-Newton  
Fuente: Elaboración propia

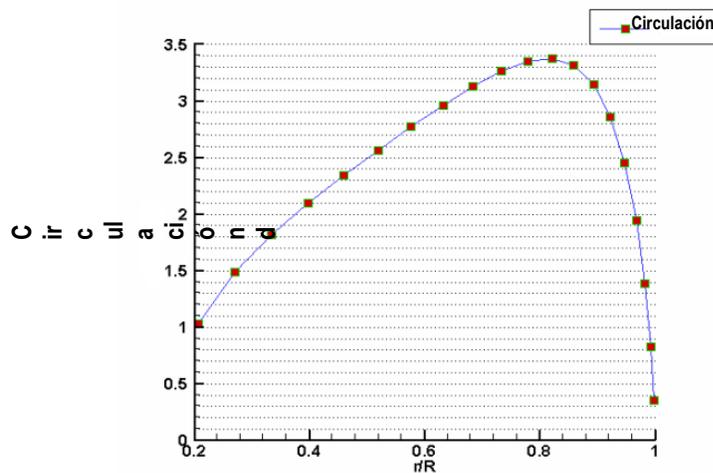


Figura 10. Circulación del diseño del método de Lagrange-Newton  
Fuente: Elaboración propia

De los resultados, podemos encontrar que la hélice diseñada por este método se compara con la hélice diseñada por el método de diseño tradicional:

- 1) Puede verse a partir de la distribución de la circulación que la distribución de la carga está sesgada hacia la punta de la pala;
- 2) A partir de la distribución de presión, se puede encontrar que hay un pico de presión negativa en el borde de ataque, que no es una distribución de presión ideal.
- 3) En el método de diseño tradicional, en el proceso de diseño de la superficie de sustentación (MIT-PBD-10), se ha asumido que la distribución de carga en la dirección de la curvatura de hélice es una distribución dada (por ejemplo,  $a=0.8$ ), por lo que, de hecho, la distribución de presión tiene restricciones. La distribución de la superficie aerodinámica bidimensional puede cumplir con la idea del diseñador, pero este método de diseño requiere bastante tiempo, por lo que se debe analizar más a fondo las razones por las que los resultados de diseño de este método de diseño son diferentes de los de los métodos de diseño tradicionales.

En el método de diseño Lagrange Newton, se diseñó el paso y la curvatura al mismo tiempo. En él, se fija uno de los parámetros geométricos y se diseña el otro parámetro, es decir, la curvatura se fija para que sea la misma que la tradicional, y luego mediante el método de Lagrange-Newton se busca la distribución de paso óptima y, finalmente, obtener la distribución de paso, la distribución del coeficiente de presión, y la distribución de circulación; dando como resultado,  $K_Q = 0.03369$ , eficiencia=0.77936. Después, se fija la distribución de los pasos para que sea la misma que el método de diseño tradicional, y luego mediante el método de optimización se diseña la distribución de la curvatura, y se puede observar las similitudes y diferencias, dando como resultado  $K_Q = 0,03362$ , eficiencia = 0,78098.

Para todos los resultados diseñados por el método Lagrange-Newton anterior y los resultados diseñados por el método de diseño tradicional de la teoría de la hélice, se hace una comparación adicional, y la fuerza de diseño y la eficiencia se muestran en la Tabla 1. Luego se compara el diagrama de distribución de la curvatura diseñado (Figura 11), el diagrama de distribución de paso (Figura 12), el diagrama de distribución del coeficiente de presión de la Figura 13, Figura 14 y Figura 15. Para esto se compara la distribución del coeficiente de presión con el lugar donde  $r/R=0.7$ .

**Tabla 1. Comparación métodos de diseño tradicionales y método de Lagrange-Newton**

	Diseño tradicional	Método de optimización	Curvatura fija	Paso fijo
$K_Q$	0.0336	0.034	0.03369	0.03362
Eficiencia	0.78.08	0.7656	0.7794	0.78098

Fuente: Elaboración propia

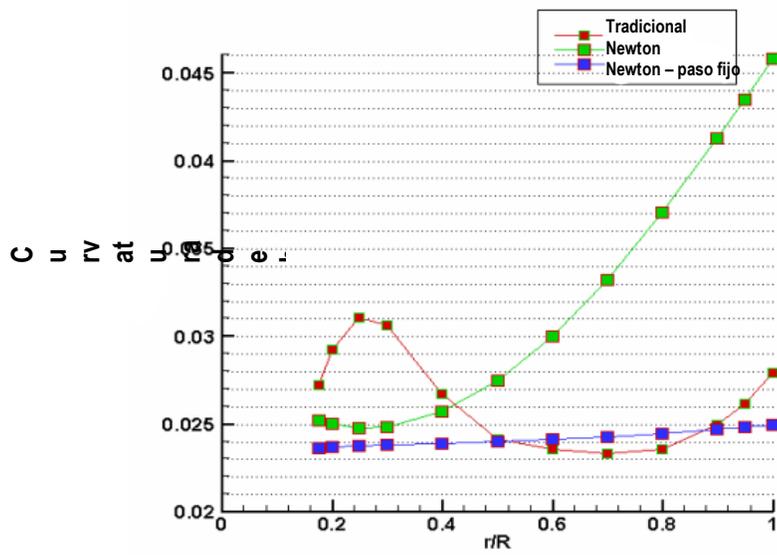


Figura 11. Comparación distribución de la curvatura diseñado  
Fuente: Elaboración propia

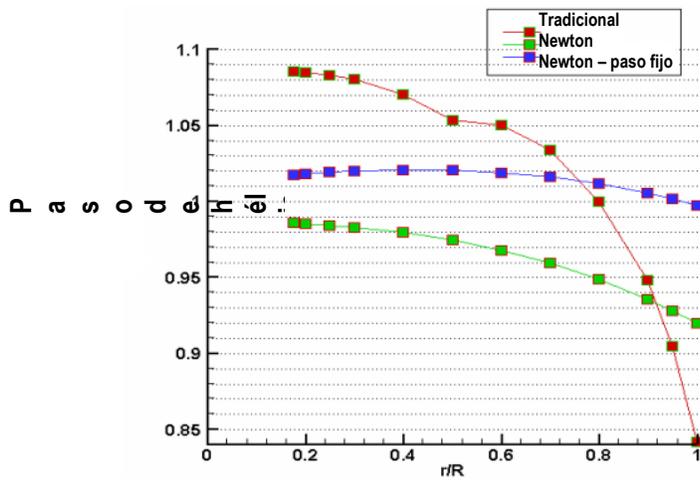


Figura 12. Comparación de paso de hélice con los tres métodos  
Fuente: Elaboración propia

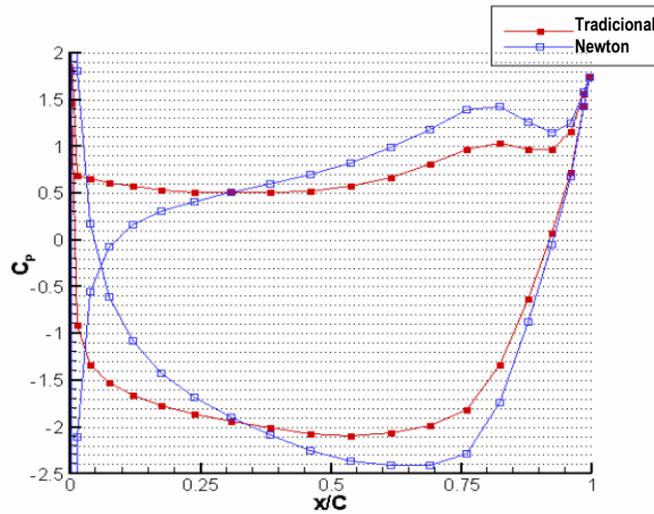


Figura 13. Comparación Cp del método tradicional y Lagrange-Newton  
Fuente: Elaboración propia

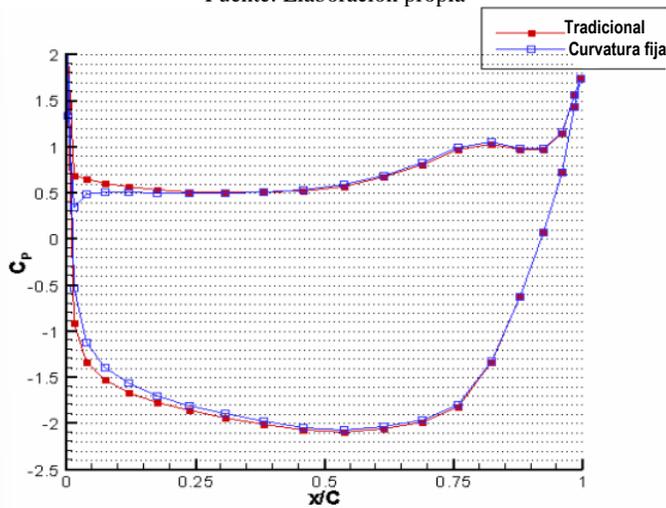


Figura 14. Comparación de Cp curvatura fija L-N vs MT  
Fuente: Elaboración propia

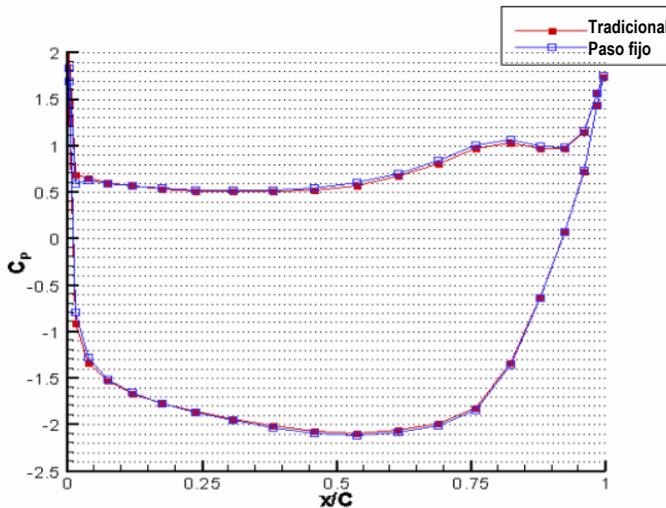


Figura 15. Comparación de Cp Paso fijo L-N vs MT  
Fuente: Elaboración propia

En el diagrama de distribución de la circulación radial de la Figura 16, de estas comparaciones encontramos que:

- 1) Fijando uno de los parámetros geométricos, la distribución de presión del resultado del diseño mejora mucho
- 2) El resultado del diseño del paso fijo es casi el mismo que el del método de diseño tradicional
- 3) Fijando un parámetro geométrico, el otro parámetro geométrico diseñado está muy cerca de los resultados de diseño de la media del método de diseño tradicional.

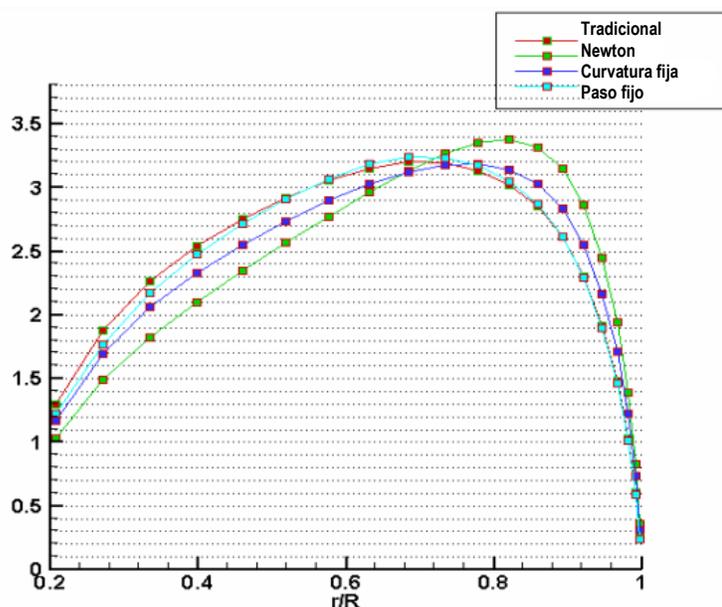


Figura 16. Comparación de la distribución de circulación de cuatro métodos  
Fuente: Elaboración propia

#### 4. DISCUSIÓN

En términos de métodos de diseño de hélices, hay principalmente diseño de hélices en serie y diseño bajo métodos teóricos, entre los cuales el diseño de métodos teóricos es la teoría de la superficie de sustentación de la hélice y la teoría de la línea de sustentación de la hélice (Mohamad et al., 2022). El método de diseño utilizado en este documento para comparar el método propuestos en este documento es el método de diseño teórico. En el ámbito del diseño teórico, la fuerza de las hélices marinas se divide en direcciones radiales y de curvatura (Abramowski, 2005).

El diseñador primero necesita determinar la distribución de la carga en las direcciones radial y de curvatura de la hélice, y en segundo lugar, averiguar la forma geométrica que puede satisfacer las cargas. En términos de evolución teórica, Eckhart y Morgan, (1955) desarrollaron el "factor de corrección de la superficie de sustentación" basado en la teoría de Lerbs y comenzaron la etapa de diseño de la superficie de sustentación.

El desarrollo de la teoría de la superficie de sustentación fue extremadamente vigoroso después de la década de 1960 se convirtió en un modelo numérico, el más famoso de los cuales es el libro de Greeley y Kerwin (1982), quienes utilizaron el método de celosía de vórtice para desarrollar un conjunto de programas teóricos de diseño de superficies de elevación PBD-10, que ayudaron a la distribución de circulación radial obtenida del diseño de la línea de elevación a la curvatura. La dirección se usa para

diseñar los parámetros geométricos tridimensionales de la hélice, y esta teoría de diseño de superficie de sustentación sigue siendo el método de diseño más utilizado para hélices marinas.

Abramowski (2005) se propone un método para la determinación de las fuerzas propulsoras durante las maniobras del buque. Se aplicaron redes neuronales artificiales a la predicción del rendimiento de una hélice que funcionaba en condiciones tales como frenado, parada y marcha atrás, y detalla que para medir la eficiencia de la hélice se deben estudiar las fuerzas en direcciones radiales y de curvatura.

Un método óptimo de diseño de hélices marinas, que integra el método de línea de elevación y panel de superficie y se caracteriza por el uso del método de panel de superficie para tener en cuenta el efecto hub, Sun y Huang (2019) establecen que al desarrollar un enfoque integrado en lugar de un método iterativo para el cálculo de la interacción entre el cubo y las palas de la hélice diseñada, los efectos del cubo en la circulación óptima pueden tenerse en cuenta a lo largo del procedimiento de diseño teórico. Esto usando la curvatura o paso de hélice diseñado por el método teórico tradicional, luego fijando uno de los parámetros y usando el método Lagrangiano-Newton para encontrar el otro parámetro, la distribución de presión resultante es mucho mejor, por lo que podemos juzgar que el método de Lagrange puede diseñar de manera estable una geometría que satisfaga las condiciones de diseño de hélice.

## 5. CONCLUSIONES

El método de Lagrange-Newton puede diseñar de manera estable una geometría que satisfaga las condiciones de restricción, pero dado que no hay restricción en la distribución de presión, la distribución del coeficiente de presión correspondiente a la geometría diseñada no puede controlarse de manera efectiva.

Usando la curvatura o paso de hélice diseñado por el método tradicional, luego fijando uno de los parámetros y usando el método Lagrangiano-Newton para encontrar el otro parámetro, la distribución de presión resultante es mucho mejor, por lo que podemos juzgar que si este método solo será más estable cuando el paso o la curvatura se diseñe por separado.

La teoría tradicional de la superficie de sustentación de la hélice no puede describir perfectamente la geometría de los nuevos tipos de hélices (como las hélices Kappel, las hélices CLT y otras.); sin embargo, el método de corrección propuesto en este artículo puede generar una geometría correspondiente, ya que la base de este método es el método del elemento de contorno, puede describir completamente la geometría real de la hélice y será aplicable a nuevos tipos de diseño de hélices en el futuro.

## REFERENCIAS

- Abramowski, T. (2005). Prediction of propeller forces during ship maneuvering. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 43(1), 157-178. <https://n9.cl/wj4eum>
- Ariana, I., Cahyono, B., & Suratno. (2020). Optimization of Propeller Design Through Polynomial Approach to Optimize The Ship Energy Efficiency. *IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science*, 557. <https://doi.org/10.1088/1755-1315/557/1/012051>
- Bayram, A., y Korobenko, A. (2021). Una formulación numérica para flujos de cavitación alrededor de hélices marinas basada en el método multiescala variacional. *Mecánica Computacional*, 68, 405-432. <https://doi.org/10.1007/s00466-021-02039-9>
- Bergamaschi, L., Gondzio, J., Martínez, A., Pearson, J., y Pougkakiotis. (2021). A New Preconditioning Approach for an Interior Point–Proximal Method of Multipliers for Linear

- and Convex Quadratic Programming. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 24(4), e2361. <https://doi.org/10.1002/nla.2361>
- Bertsekas, D. (1982). *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*. Academic Press.
- Bussotti, P. (2003). On the Genesis of the Lagrange Multipliers. *Journal of optimization theory and applications*, 117(3), 453-459. <https://doi.org/10.1023/A:1023952102705>
- Cheng, Q., y Liu, C. S. (2020). A new Lagrange multiplier approach for gradient flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 367, 113070. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113070>
- Eckhart, M., y Morgan, W. (1955). *A propeller design method*. SNAME Trans.
- Greeley, D., y Kerwin, J. (1982). *Numerical methods for propeller design and analysis in steady flow*. Society of Naval Architects and Marine Engineers.
- Mohamad, Z., Shashank, R., y Mathew, M. (2022). Methodology to Develop Propeller using Circulation Theory: Review and Application. *Oceans 2022 - Chennai*, 1-11. <https://doi.org/10.1109/OCEANSChennai45887.2022.9775349>.
- Ruis, G., Maheut, J., Estellés, S., y García, J. (2018). Coordination mechanisms with mathematical programming models for decentralized decision-making: a literature review. *Central European Journal of Operations Research*, 25, 61-104. <https://doi.org/10.1007/s10100-018-0594-z>
- Sumanth, P., Hickel, S., Terwisa, T., y Visser, K. (2022). A machine learning approach for propeller design and optimization: Part I. *Applied Ocean Research*, 124. <https://doi.org/10.1016/j.apor.2022.103178>
- Sun, W., y Huang, G. (2019). Método integrado de línea de elevación/panel de superficie para un diseño óptimo de la hélice teniendo en cuenta el efecto del cubo. *Revista de hidrodinámica*, 31, 1218-1230. <https://doi.org/10.1007/s42241-019-0051-z>
- Vadlamani, S., Vadlamani, S., y Yablonovitch, E. (2020). Physics successfully implements Lagrange multiplier optimization. *PNA Journal*, 117(43), 26639 - 26650. <https://doi.org/10.1073/pnas.2015192117>
- Wang, H., Largo, Z., y Chen, S. (2022). Marine Propeller Optimization Based on a Novel Parametric Model. *Mathematical Problems in Engineering*, 22, 1-19. <https://doi.org/10.1155/2022/5612793>